

CWB GFS 非靜力動力架構發展現況

劉邦彥^{1,4} 陳建河² 莊漢明³ 林沛練⁴
中央氣象局科技研究中心¹ 中央氣象局資訊中心² 美國國家環境預測中心³ 中央大學大氣物理研究所⁴

摘要

現行中央氣象局全球預報模式 (CWB GFS) 上線作業版本之水平解析度為 T511，垂直層數已達 60 層，未來解析度仍會持續提升。在如此高水平解析度之積分過程中，其動力架構中非靜力之效應已慢慢顯見。有鑑於此，中央氣象局於 2015 年底便計畫針對 CWB GFS 之動力架構進行升級至非靜力進行評估，以了解非靜力動力架構對於 CWB GFS 是否有提升的功效。

本文中所求得之控制方程式，滿足了角動量守恆、動量守恆、熱力守恆以及位勢能守恆的過程，且參考美國國家環境預測中心中尺度區域波譜模式 (NCEP MSM) 之動力架構，將控制方程中之氣壓與溫度場，利用擾動分離法分開計算非靜力與靜力效應之貢獻。同時亦針對現行 CWB GFS 之動力架構進行評估，並探討如何以最少之修改幅度，將非靜力之動力架構應用至現行作業系統上，一方面簡化發展過程之複雜度，另一方面則是減少編譯過程所造成錯誤之機率。

關鍵字：非靜力、擾動法

一、前言

中央氣象局全球模式現行作業化版本之水平解析度為 T511，垂直層數已達到 60 層，動力架構仍是靜力模式，而就現行解析度來說，靜力之動力架構在水平解析度達到 400 個波以上時，已不那麼適當 (Daley 1988)，故非靜力模式之發展對於中央氣象局全球模式而言，已是面臨是否投入發展的分水嶺上。於 2015 年底，中央氣象局決定針對全球模式動力架構進行更新發展，藉由引進更先進的數值技術以及非靜力動力架構的發展，進而提升本局全球模式的預報能力。今年度便針對非靜力動力架構進行發展評估，上半年主要工作為非靜力動力方程式之推導，並針對現行全球模式之動力架構進行評估及架構設計。

依照未來規劃，現行中央氣象局區域波譜模式 (CWB RSM) 之垂直座標將會由原先的 sigma 座標更改為與 CWB GFS 相同的 sigma-p 座標，並融入 CWB GFS 中成為單一模式中的一環。依照上述規畫，若 CWB GFS 以及 CWB RSM 之動力架構能一致，當未來 CWB GFS 供應邊界資料給 CWB RSM 時，勢必可減少資料轉換的複雜度與電腦資源消耗。而就我們所了解，CWB RSM 之動力架構與 NCEP MSM 相似，因此在發展非靜力動力架構時，

便參考 NCEP MSM 的非靜力動力架構 (Juang 2000)，以擾動法將非靜力效應加入模式中。

本文中，將對非靜力方程式之推導過程進行描述，首先在第二章中，便會對於球面座標系統下之原始方程式進行描述及定義。第三章便會依據能量守恆的限制，將原始方程式中垂直梯度的部分改寫為垂直分解式的形式。第四章則會解出垂直通量，第五章便會應用擾動法改寫溫度與壓力之趨勢方程式及所有動量方程式最終形式之改寫。

二、控制方程式

本章節主要為闡述淺層大氣非靜力系統之控制方程式之構成，由過去 NCEP MSM 中所得之經驗，雖其動力架構為非靜力，但其垂直座標仍以靜力架構進行定義，可使模式能得到穩定的積分結果。基於上述因素，便針對垂直座標轉換之靜力關係進行定義：

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} = -\rho g \quad (2.1)$$

當中 ρ 滿足靜力系統之狀態方程式：

$$\frac{p}{RT} = \rho = \frac{\bar{p}}{RT} \quad (2.2)$$

上式中， p 及 T 分別為氣壓及氣溫之完全場，而 \bar{p} 與 \bar{T} 則分別為氣壓及氣溫之靜力部份之貢獻量， R 為理想氣體常數，

ρ 為密度。模式中，其垂直座標之定義為 σ - p 座標，其氣壓之定義為 $p_k = A_k + B_k p_s$ 。於是將靜力穩定之定義轉換至 σ - p 座標下，並將(2.2)式之關係帶入(2.1)式中，便得到以下關係式：

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} = -\rho g \frac{\partial r}{\partial \zeta} = -\frac{\bar{p} g}{R\bar{T}} \frac{\partial r}{\partial \zeta} \quad (2.3)$$

有了以上 σ - p 座標之靜力關係式後，便將通用垂直座標轉換法進行改寫，垂直方向：

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{\lambda,\mu,t} = \frac{\partial \zeta}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)_{\lambda,\mu,t} = -\frac{\bar{p} g}{R\bar{T}} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{p}} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)_{\lambda,\mu,t} \quad (2.4)$$

水平方向：

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \Psi}\right)_r &= \left(\frac{\partial}{\partial \Psi}\right)_\zeta - \left(\frac{\partial r}{\partial \Psi}\right)_\zeta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)_{\lambda,\mu,t} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \Psi}\right)_\zeta + \left(\frac{\partial r}{\partial \Psi}\right)_\zeta \frac{\bar{p} g}{R\bar{T}} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{p}} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)_{\lambda,\mu,t} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ψ 則可以是 λ 及 μ 的空間導數，或是時間 t 導數。

淺層大氣非靜力球面座標系統原始方程式之表示式可由 Haltiner and Williams (1980) 所撰寫的數值天氣預報及天氣動力教科書中可取得，球座標方程式中，半徑之表示為 r ，但為滿足淺層大氣的假設， r 便會帶入地球半徑 a 。此外再帶入(2.4)及(2.5)式，球座標下之非靜力系統方程式則可直接轉換為 σ - p 座標系統方程式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t} &= -m^2 \frac{u^*}{a} \frac{\partial u^*}{\partial \lambda} - \frac{v^*}{a} \frac{\partial u^*}{\partial \mu} - \zeta \frac{\partial u^*}{\partial \zeta} - RT \frac{\partial \ln p}{\partial \lambda} \\ &\quad - \bar{p} g \frac{T}{\bar{T}} \frac{\partial r}{\partial \lambda} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{p}} \frac{\partial \ln p}{\partial \zeta} + f_s v^* + F_u \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^*}{\partial t} &= -m^2 \frac{v^*}{a} \frac{\partial v^*}{\partial \lambda} - \frac{v^*}{a} \frac{\partial v^*}{\partial \mu} - \zeta \frac{\partial v^*}{\partial \zeta} - \cos^2 \phi RT \frac{\partial \ln p}{\partial \mu} \\ &\quad - \cos^2 \phi \bar{p} g \frac{T}{\bar{T}} \frac{\partial r}{\partial \mu} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{p}} \frac{\partial \ln p}{\partial \zeta} - f_s u^* \\ &\quad - m^2 \frac{u^{*2} + v^{*2}}{a} \sin \phi + F_v \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= -m^2 \frac{u^*}{a} \frac{\partial w}{\partial \lambda} - \frac{v^*}{a} \frac{\partial w}{\partial \mu} - \zeta \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \bar{p} g \frac{T}{\bar{T}} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{p}} \frac{\partial \ln p}{\partial \zeta} - g \\ &\quad + F_w \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta}\right) &+ m^2 \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(u^* \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta}\right) + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(v^* \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta}\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta}\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -m^2 u^* \frac{\partial T}{\partial \lambda} - v^* \frac{\partial T}{\partial \mu} - \zeta \frac{\partial T}{\partial \zeta} + kT \frac{d \ln p}{dt} + \frac{F_T}{C_p} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = -m^2 u^* \frac{\partial \bar{T}}{\partial \lambda} - v^* \frac{\partial \bar{T}}{\partial \mu} - \zeta \frac{\partial \bar{T}}{\partial \zeta} + \frac{k\bar{T}}{\bar{p}} \frac{d\bar{p}}{dt} \quad (2.11)$$

以上方程式當中， u^* 、 v^* 與 w 分別為緯向、經向及垂直風速， f 為科氏力， m 為投影係數(2.13)式， F_u 、 F_v 、 F_w 以及 F_T 為次網格尺度或是模是物理之強迫項。其他對應之符號表示如下：

$$k = \frac{R}{C_p} \quad (2.12)$$

$$m^2 = \frac{1}{\cos^2 \phi} \quad (2.13)$$

前述中之方程式，由於參考了 Juang(2000) 的動力架構，方程式中我們將氣壓與溫度變數分出了靜力的部分以及完全場的部分，於是我們將變數符號 \bar{p} 定義為靜力氣壓， p 為完全氣壓，其差異在於完全氣壓包含的非靜力的氣壓擾動貢獻量 p' ，相同的對於溫度 T 亦是相同的定義方式，而熱力方程式也因此多出了靜力下的熱力方程式(2.11)。

三、垂直分解式

本章節主要之目的為，將方程式中垂直梯度項次進行差分形式之改寫，且此過程必須遵守能量守恆之原則，確保改寫為差分形式後，其運算後的結果與微分形式之結果相同。在公式推導的過程中，勢必需要地面氣壓趨勢方程，故可由連續方程式(2.9)進行差分式之改寫，得到之地面氣壓趨勢方程式為：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}_s}{\partial t} &= - \sum_{i=1}^K \Delta B_i \left[m^2 u^* \frac{\partial \bar{p}_s}{\partial \lambda} + v^* \frac{\partial \bar{p}_s}{\partial \mu} \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^K (\Delta A + \Delta B \bar{p}_s)_i D_i \end{aligned} \quad (3.1)$$

當中 $D = m^2 \frac{\partial u^*}{\partial \lambda} + \frac{\partial v^*}{\partial \mu}$ 。由於在模式中，變數場所在的位置皆是在模式層(Layers)上，但對於氣壓、垂直速度及重力位等變數其所在的位置是在模式介面層(Levels)上，故接下來必須得找出模式層與模式介面層間的關係式，並將角動量的形式進行改寫，其中下標 T 代表著大氣層頂的狀態，而 S 代表地面，而方程式行式轉換之過程中，可得到：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^K \left[(\hat{p}_i - \hat{p}_{i+1}) \left(RT \frac{\partial \ln p}{\partial \lambda} \right)_i - \Phi_i \left(\frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \lambda} - \frac{\partial \hat{p}_{i+1}}{\partial \lambda} \right) \right] \\ = - \left(\Phi \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_T + \left(\Phi \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_S \end{aligned} \quad (3.2)$$

由方程式(3.2)中可看到，變數上方有標示 \wedge 則是屬於在模式介面層的變數，沒有 \wedge 符號的變數則是屬於在模式層上之變數，而模式介面層與層式層上的變數以及定義可參考圖 1 所示。而方程式(3.2)中仍有屬於在模式介面層上之變數，於是我們得進一步將之以模式層上之變數表示之，於是便假設關係式為

$\nabla \ln p_i = \frac{\partial \ln p_i}{\partial \hat{p}_{i+1}} \nabla \hat{p}_{i+1} + \frac{\partial \ln p_i}{\partial \hat{p}_i} \nabla \hat{p}_i$ ，並將之帶入(3.2)中求解，得到：

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^K \left[\left(\Phi_i + (\hat{p}_i - \hat{p}_{i+1})(RT)_i \frac{\partial \ln p_i}{\partial \hat{p}_{i+1}} \right) \frac{\partial \hat{p}_{i+1}}{\partial \lambda} \right. \\ & \quad \left. + \left(-\Phi_i + (\hat{p}_i - \hat{p}_{i+1})(RT)_i \frac{\partial \ln p_i}{\partial \hat{p}_i} \right) \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial \lambda} \right] \\ & = - \left(\Phi \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_T + \left(\Phi \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_s \end{aligned} \quad (3.3)$$

將(3.3)式由 $k=1, K$ 逐層展開，並加以觀察，便可定義以下條件來滿足(3.3)式：

$$\begin{aligned} & \left[(RT)_{k+1} (\hat{p}_{k+1} - \hat{p}_{k+2}) \frac{\partial \ln p_{k+1}}{\partial \hat{p}_{k+1}} - \Phi_{k+1} \right] \\ & \quad + \left[(RT)_k (\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1}) \frac{\partial \ln p_k}{\partial \hat{p}_{k+1}} + \Phi_k \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

由 $k=1, K-1$ ，得到：

$$(RT)_K (\hat{p}_K - \hat{p}_{K+1}) \frac{\partial \ln p_K}{\partial \hat{p}_{K+1}} + \Phi_K = \Phi_s \quad (3.5)$$

$$(RT)_1 (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \frac{\partial \ln p_1}{\partial \hat{p}_1} - \Phi_1 = -\Phi_T \quad (3.6)$$

於是可以得到模式層與介面層之間的靜力關係式：

$$\Phi_k - \hat{\Phi}_k = (RT)_k (\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1}) \frac{\partial \ln p_k}{\partial \hat{p}_k} \quad (3.7)$$

$$\hat{\Phi}_{k+1} - \Phi_k = (RT)_k (\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1}) \frac{\partial \ln p_k}{\partial \hat{p}_{k+1}} \quad (3.8)$$

得到(3.7)及(3.8)靜力關係式後，便可進一步利用水平動量守恆之過程得到靜力氣壓的趨勢方程，並找到垂直分解式的方法，由水平方向動量守恆開始進行方程式形態之轉換，便可得到一組改寫為差分形式之靜力氣壓趨勢方程式，再將模式介面層上的靜力關係式(3.7)和(3.8)帶入，並且遵循以下垂直分解之原則：

$$\left(\frac{RT}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right)_k = \left(\frac{RT}{\bar{p}} \right)_k \frac{\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1}}{\Delta \zeta_k} \quad (3.9)$$

在 $k=1, K$ 的範圍中，可以得到：

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\bar{p}}{dt} \right)_k & = p_k \left[\frac{\partial \ln p_k}{\partial \hat{p}_{k+1}} \frac{\partial \hat{p}_{k+1}}{\partial t} + \frac{\partial \ln p_k}{\partial \hat{p}_k} \frac{\partial \hat{p}_k}{\partial t} \right] \\ & \quad + \left(m^2 u^* \frac{\partial \bar{p}}{\partial \lambda} + v^* \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mu} \right)_k \\ & \quad + p_k \left[\frac{\partial \ln p_k}{\partial \hat{p}_{k+1}} \left(\zeta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right)_{k+1} + \frac{\partial \ln p_k}{\partial \hat{p}_k} \left(\zeta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right)_k \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

觀察(3.10)式中的形式，我們可以發現，位於模式層位於 k 之數值之計算，其與上下兩層模式介面層 k 及 $k+1$ 有直接的關係，故在此給定一個簡單的假設：

$$\frac{\partial \ln p_k}{\partial \hat{p}_{k+1}} = \frac{\partial \ln p_k}{\partial \hat{p}_k} = \frac{1}{2p_k} \quad (3.11)$$

並將(3.11)式帶入先前的假設關係式 $\nabla \ln p_i =$

$\frac{\partial \ln p_i}{\partial \hat{p}_{i+1}} \nabla \hat{p}_{i+1} + \frac{\partial \ln p_i}{\partial \hat{p}_i} \nabla \hat{p}_i$ 中，便可得到一個模式層與模式介面層之關係：

$$p_k = \frac{\hat{p}_{k+1} + \hat{p}_k}{2} \quad (3.12)$$

上式為全部氣壓的模式層與模式介面層之相關性，若針對靜力下的壓力進行同樣的計算，我們亦會得到同樣的結果。在 $k=1, K$ 的範圍中，將上式(3.12)帶入靜力關係式中(3.7)以及(3.8)中，並將兩式相加後得到 $k=K, k$ 重力位高度之方程式：

$$\hat{\Phi}_k = \Phi_s + 2 \sum_{i=k}^K (RT)_i \frac{\hat{p}_{i+1} - \hat{p}_i}{\hat{p}_{i+1} + \hat{p}_i} \quad (3.13)$$

以上式子便可求得重力位高度之分布，進一步可用於後續計算重力位高度水平梯度之部分。最終在計算靜力氣壓方程式之部分，將(3.11)及(3.12)帶入(3.10)中，便可得到其最終之形式：

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\bar{p}}{dt} \right)_k & = \frac{1}{2} (\hat{B}_k \\ & \quad + \hat{B}_{k+1}) \left[- \sum_{i=1}^K \Delta B_i \left(m^2 u^* \frac{\partial \bar{p}_s}{\partial \lambda} + v^* \frac{\partial \bar{p}_s}{\partial \mu} \right)_i \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i=1}^K (\hat{p}_{0i} - \hat{p}_{0i+1}) D_i + \left(m^2 u^* \frac{\partial \bar{p}_s}{\partial \lambda} + v^* \frac{\partial \bar{p}_s}{\partial \mu} \right)_k \right] \\ & \quad + \frac{1}{2} \left[\left(\zeta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right)_k + \left(\zeta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right)_{k+1} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

由上述之過程，已求得模式層與模式介面層間的關係以及重力位高度方程，亦得到靜力氣壓之趨勢，但為了能利用擾動法算出非靜力效應，得再求出完全氣壓之趨勢，故得再由三維動量守恆方程式著手，並利用推導靜力氣壓趨勢方程同樣的方法，針對三維動量方程式進行方程式形態之轉換，進而求

得完全氣壓趨勢方程式，並進一步套用模式層與模式介面層之關係(3.12)及重力位高度方程(3.13)至其中，加以改寫後便得到所謂的完全氣壓趨勢方程：

$$\begin{aligned} \left(\frac{dlnp}{dt}\right)_k &= -\frac{c_p}{c_v} \left[\left(m^2 \frac{\partial u^*}{\partial \lambda} + \frac{\partial v^*}{\partial \mu} \right)_k - \right. \\ &\frac{\hat{p}_k + \hat{p}_{k+1}}{2(R\bar{T})_k(\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1})} \left[m^2 \frac{u_k^* - u_{k-1}^*}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}_k}{\partial \lambda} + \right. \\ &\frac{v_k^* - v_{k-1}^*}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}_k}{\partial \mu} - m^2 \frac{u_{k+1}^* - u_k^*}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}_{k+1}}{\partial \lambda} - \\ &\left. \left. \frac{v_{k+1}^* - v_k^*}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}_{k+1}}{\partial \mu} + g(\hat{w}_k - \hat{w}_{k+1}) \right] \right] + \\ &\frac{1}{2} \left[\left(\zeta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right)_k + \left(\zeta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right)_{k+1} \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

由前述之結果，已得到靜力座標下的氣壓方程式以及完整氣壓方程式之垂直差分式，同時於熱力方程式中亦含有氣壓方程式之貢獻項，因此藉由(2.10)及(2.11)的結果，帶入熱力方程式中完成熱力方程式垂直分解式的改寫，其中先由靜力氣壓方程式(3.14)帶入靜力熱力方程式(2.11)後得到：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}_k}{\partial t} &= -m^2 u^* \frac{\partial \bar{T}_k}{\partial \lambda} - v^* \frac{\partial \bar{T}_k}{\partial \mu} - \zeta \frac{\partial \bar{T}_k}{\partial \zeta} \\ &- \frac{(k\bar{T})_k}{\hat{p}_k + \hat{p}_{k+1}} \left[\hat{B}_k \right. \\ &+ \hat{B}_{k+1} \left[\sum_{i=1}^K \Delta \hat{B}_i \left(m^2 u^* \frac{\partial \bar{p}_s}{\partial \lambda} + v^* \frac{\partial \bar{p}_s}{\partial \mu} \right)_i \right. \\ &+ \sum_{i=1}^K (\hat{p}_i - \hat{p}_{i+1}) D_i - \left(m^2 u^* \frac{\partial \bar{p}_s}{\partial \lambda} + v^* \frac{\partial \bar{p}_s}{\partial \mu} \right)_k \\ &\left. \left. - \left(\zeta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right)_k - \left(\zeta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right)_{k+1} \right] \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

再將完全氣壓方程式(3.15)帶入完全熱力方程式(2.10)後得到：

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_k}{\partial t} &= -m^2 u^* \frac{\partial T_k}{\partial \lambda} - v^* \frac{\partial T_k}{\partial \mu} - \zeta \frac{\partial T_k}{\partial \zeta} \\ &- (kT)_k \frac{c_p}{c_v} \left[\left(m^2 \frac{\partial u^*}{\partial \lambda} + \frac{\partial v^*}{\partial \mu} \right)_k \right. \\ &- \frac{\hat{p}_k + \hat{p}_{k+1}}{2(R\bar{T})_k(\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1})} \left[m^2 \frac{u_k^* - u_{k-1}^*}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}_k}{\partial \lambda} \right. \\ &+ \frac{v_k^* - v_{k-1}^*}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}_k}{\partial \mu} + m^2 \frac{u_{k+1}^* - u_k^*}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}_{k+1}}{\partial \lambda} \\ &\left. \left. + \frac{v_{k+1}^* - v_k^*}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}_{k+1}}{\partial \mu} + g(\hat{w}_k - \hat{w}_{k+1}) \right] \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

由垂直分解式的過程，已分別得到完全氣壓、靜力氣壓、完全氣溫及靜力氣溫的趨勢方程的垂直分解方法，以保持其原有方程式之特性，並進一步進行後續擾動分離法之過程。

四、垂直通量

前一章節中已找到方程式符合能量守恆的垂直差分方法，且找到模式層與模式介面層之關係，並進一步推導出壓力趨勢方程與熱力方程，但該方程式中仍有垂直通量項目尚須進行求解的動作，唯有完成此步驟，趨勢方程才能得以求得未來時間之變數場分布。垂直通量的求解，便由垂直運動方程進行求解，首先得將垂直運動方程(2.8)由模式層改寫至模式介面層上，得到：

$$\hat{w} = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} + V_H \cdot \nabla_H \Phi - \frac{R\bar{T}}{\bar{p}} \zeta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right) \quad (4.1)$$

同時並將先前求得之重力位高度方程(3.13)對時間偏微分並帶入(4.1)式中，求解得到範圍 $k=1, K+1$ ，垂直通量的計算式：

$$\begin{aligned} \frac{R}{g} \left(\frac{\bar{T}_{k-1} + \bar{T}_k}{2\hat{p}_k} - \frac{\bar{T}_{k-1} - \bar{T}_k}{\hat{p}_{k+1} + \hat{p}_k} \right. \\ \left. - \frac{2(k\bar{T})_k(\hat{p}_{k+1} - \hat{p}_k)}{(\hat{p}_{k+1} + \hat{p}_k)^2} \right) \left(\zeta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right)_k \\ = H_k - \hat{w}_k \\ + \frac{R}{g} \sum_{i=k}^{k+1} \left(\frac{\bar{T}_{i-1} - \bar{T}_i}{\hat{p}_{i+1} + \hat{p}_i} + \frac{2(k\bar{T})_i(\hat{p}_{i+1} - \hat{p}_i)}{(\hat{p}_{i+1} + \hat{p}_i)^2} \right) \left(\zeta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right)_i \\ + \frac{R}{g} \sum_{i=k}^k \left(\frac{\bar{T}_i - \bar{T}_{i+1}}{\hat{p}_{i+1} + \hat{p}_i} \right. \\ \left. + \frac{2(k\bar{T})_i(\hat{p}_{i+1} - \hat{p}_i)}{(\hat{p}_{i+1} + \hat{p}_i)^2} \right) \left(\zeta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right)_{i+1} \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中 H_k 之定義為：

$$\begin{aligned} H_k &= \frac{2}{g} \sum_{i=k}^k \left[R \frac{\hat{p}_{i+1} - \hat{p}_i}{\hat{p}_{i+1} + \hat{p}_i} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \right)_i \right. \\ &+ \left. \frac{2(R\bar{T})_i}{(\hat{p}_{i+1} + \hat{p}_i)^2} \left[\hat{p}_{i+1} \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial t} - \hat{p}_i \frac{\partial \hat{p}_{i+1}}{\partial t} \right] \right] \\ &+ \frac{1}{g} (V_H \cdot \nabla_H \Phi)_k \end{aligned} \quad (4.3)$$

(4.3)式中， $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i$ 之定義為捨去(3.16)式中含有 ζ 之項次。另定義大氣層頂與大氣層底之邊界條件為：

$$\left(\zeta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right)_1 = \left(\zeta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta} \right)_{K+1} = 0 \quad (4.4)$$

透過以上之方程式及定義，便可逐一由 $k=K$ （次地表層）逐層求解至 $k=2$ （次頂層）之垂直通量。

五、擾動法

參考 Juang(2000)針對 NCEP MSM 所採用的擾動法，將模式動力架構系統中，加入非靜力效應，針對的變數僅有氣壓 $\ln p$ 以及溫度 T ，其定義為：

$$T' = T - \bar{T} \quad (5.1a)$$

$$\ln p' = \ln p - \ln \bar{p} \quad (5.1b)$$

依照上述定義，便可以針對氣壓與溫度之方程式進行改寫，進而列出非靜力的氣壓與溫度趨勢方程式。要找出非靜力氣壓趨勢方程式，首先將(5.1b)之定義帶入(3.15)中：

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \ln p'}{\partial t}\right)_k &= -m^2 u^*_k \left(\frac{\partial \ln p'}{\partial \lambda}\right)_k - v^*_k \left(\frac{\partial \ln p'}{\partial \mu}\right)_k - \\ &\frac{1}{2(\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1})} \left[\overline{\overline{(\ln p'_{k-1} - \ln p'_k) \left(\zeta \frac{\partial \hat{p}}{\partial \zeta}\right)_k}} \right] - \\ &\frac{1}{2(\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1})} \left[\overline{\overline{(\ln p'_k - \ln p'_{k+1}) \left(\zeta \frac{\partial \hat{p}}{\partial \zeta}\right)_{k+1}}} \right] - \\ &\frac{c_p}{c_v} \left[m^2 \frac{\partial u^*}{\partial \lambda} + \frac{\partial v^*}{\partial \mu} \right]_k - \frac{\hat{p}_k + \hat{p}_{k+1}}{2(R\bar{T})_k(\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1})} \left[m^2 \frac{u^*_k - u^*_{k-1}}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}_k}{\partial \lambda} + \right. \\ &\left. \frac{m^2 u^*_{k+1} - u^*_k}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}_{k+1}}{\partial \lambda} + \frac{v^*_k - v^*_{k-1}}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}_k}{\partial \mu} + \frac{v^*_{k+1} - v^*_k}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}_{k+1}}{\partial \mu} + \right. \\ &\left. g(\hat{w}_k - \hat{w}_{k+1}) \right] - \frac{2}{\hat{p}_k + \hat{p}_{k+1}} \left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)_k \end{aligned} \quad (5.2)$$

找出非靜力溫度趨勢方程式，需將(5.1a)之定義以及(3.16)帶入(3.17)得到：

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T'}{\partial t}\right)_k &= \left[-m^2 u^* \frac{\partial(T')}{\partial \lambda} - v^* \frac{\partial(T')}{\partial \mu} \right]_k - \\ &\frac{1}{2(\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1})} \left[\overline{\overline{(T'_{k-1} - T'_k) \left(\zeta \frac{\partial \hat{p}}{\partial \zeta}\right)_k}} \right] - \\ &\frac{1}{2(\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1})} \left[\overline{\overline{(T'_k - T'_{k+1}) \left(\zeta \frac{\partial \hat{p}}{\partial \zeta}\right)_{k+1}}} \right] - \\ &\frac{R}{c_v} (\bar{T} + T')_k \left[m^2 \frac{\partial u^*}{\partial \lambda} + \frac{\partial v^*}{\partial \mu} \right]_k - \\ &\frac{\hat{p}_k + \hat{p}_{k+1}}{2(R\bar{T})_k(\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1})} \left[m^2 \frac{u^*_k - u^*_{k-1}}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}_k}{\partial \lambda} + \frac{v^*_k - v^*_{k-1}}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}_k}{\partial \mu} + \right. \\ &\left. m^2 \frac{u^*_{k+1} - u^*_k}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}_{k+1}}{\partial \lambda} + \frac{v^*_{k+1} - v^*_k}{2} \frac{\partial \hat{\Phi}_{k+1}}{\partial \mu} + g(\hat{w}_k - \right. \\ &\left. \hat{w}_{k+1}) \right] + \frac{F_T}{c_p} - \frac{2(k\bar{T})_k}{\hat{p}_k + \hat{p}_{k+1}} \left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)_k \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t}\right)_k &= \left[-m^2 u^* \frac{\partial \bar{T}}{\partial \lambda} - v^* \frac{\partial \bar{T}}{\partial \mu} \right]_k - \\ &\frac{1}{2(\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1})} \left[\overline{\overline{(\bar{T}_{k-1} - \bar{T}_k) \left(\zeta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta}\right)_k}} \right] + \\ &\frac{1}{2(\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1})} \left[\overline{\overline{(\bar{T}_k - \bar{T}_{k+1}) \left(\zeta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \zeta}\right)_{k+1}}} \right] + \\ &\frac{2(k\bar{T})_k}{\hat{p}_k + \hat{p}_{k+1}} \left(\frac{d\bar{p}}{dt}\right)_k \end{aligned} \quad (5.4)$$

除此之外，三維動量方程式有關於氣壓與溫度變數之部分亦需進行擾動法以及垂直分解之動作，因此最終之三維動量方程式便可寫為：

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u^*}{\partial t}\right)_k &= -m^2 u^*_k \left(\frac{\partial u^*}{\partial \lambda}\right)_k - v^*_k \left(\frac{\partial u^*}{\partial \mu}\right)_k - \\ &\frac{1}{2(\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1})} \left[\overline{\overline{(u^*_{k-1} - u^*_k) \left(\zeta \frac{\partial \hat{p}}{\partial \zeta}\right)_k}} \right] - R(\bar{T} + \\ &T')_k \left[\frac{\hat{p}_k + \hat{p}_{k+1}}{\hat{p}_k + \hat{p}_{k+1}} \frac{\partial \bar{p}_s}{\partial \lambda} + \left(\frac{\partial \ln p'}{\partial \lambda}\right)_k \right] - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{T'}{\bar{T}}\right)_k \left(\frac{\partial \hat{\Phi}_k}{\partial \lambda} + \right. \\ &\left. \frac{\partial \hat{\Phi}_{k+1}}{\partial \lambda} \right) \left[1 + \frac{1}{2(\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1})} \left(\overline{\overline{(\ln p'_{k-1} - \ln p'_k) \hat{p}_k}} \right) + \right. \\ &\left. \overline{\overline{(\ln p'_k - \ln p'_{k+1}) \hat{p}_{k+1}}} \right] + \\ &f_s v^*_k + F_u \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v^*}{\partial t}\right)_k &= -m^2 u^*_k \left(\frac{\partial v^*}{\partial \lambda}\right)_k - v^*_k \left(\frac{\partial v^*}{\partial \mu}\right)_k - \\ &\frac{1}{2(\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1})} \left[\overline{\overline{(v^*_{k-1} - v^*_k) \left(\zeta \frac{\partial \hat{p}}{\partial \zeta}\right)_k}} \right] - \\ &\cos^2 \phi R(\bar{T} + T')_k \left[\frac{\hat{p}_k + \hat{p}_{k+1}}{\hat{p}_k + \hat{p}_{k+1}} \frac{\partial \bar{p}_s}{\partial \mu} + \left(\frac{\partial \ln p'}{\partial \mu}\right)_k \right] - \\ &\cos^2 \phi \left(1 + \frac{T'}{\bar{T}}\right)_k \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{\Phi}_k}{\partial \mu} + \frac{\partial \hat{\Phi}_{k+1}}{\partial \mu}\right) \left[1 + \right. \\ &\left. \frac{1}{2(\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1})} \left(\overline{\overline{(\ln p'_{k-1} - \ln p'_k) \hat{p}_k}} \right) + \right. \\ &\left. \overline{\overline{(\ln p'_k - \ln p'_{k+1}) \hat{p}_{k+1}}} \right] - f_s u^*_k - \\ &m^2 \frac{u^*_{k+1} + v^*_{k+1}}{a} \sin \phi + F_v \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial t}\right)_k &= -m^2 \frac{u^*_k + u^*_{k-1}}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \lambda}\right)_k - \frac{v^*_k + v^*_{k-1}}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \mu}\right)_k \\ &- \frac{1}{2} \left(\zeta \frac{\partial \hat{p}}{\partial \zeta}\right)_k \left(\frac{\hat{w}_{k-1} - \hat{w}_k}{\hat{p}_{k-1} - \hat{p}_k} + \frac{\hat{w}_k - \hat{w}_{k+1}}{\hat{p}_k - \hat{p}_{k+1}} \right) + g \left(1 + \right. \\ &\left. \frac{T'_{k-1} + T'_k}{\bar{T}_{k-1} + \bar{T}_k} \right) \left(1 + 2\hat{p}_k \left(\frac{\overline{\overline{(\ln p'_{k-1} - \ln p'_k) \hat{p}_k}}}{\hat{p}_{k-1} - \hat{p}_k} \right) \right) - g + F_w \end{aligned} \quad (5.7)$$

$k=1, K+1$ 的範圍內， $k=1$ 及 $k=K+1$ 為邊界條件，雙頂線代表大氣層頂，雙底線代表地面。項次中若有超出此範圍之變數數值，該項之數值便定義為 0。以上(5.5)、(5.6)、(5.7)、(5.4)、(5.3)、(3.14)以及(5.2)便是所有經過垂直差分改寫及擾動法分離後的控制方程式，其垂直通量部分邊界條件如(4.4)式所示。

六、結果與討論

經過上述繁複的公式推導過程，文中的控制方程式在水平系統上採球面座標，而垂直上則是運用通用座標系統，雖然本文是以 Juang(2000)應用於 NCEP MSM 所發展的動力架構為發展基礎，但於 CWB GFS 之垂直座標系統為 σ -p，並非 NCEP MSM 的 σ 系統，故在垂直座標系統上，兩者有些許差異存在。

本文中所推導的非靜力動力方程式為淺層大氣架構，其方程式亦滿足了角動量守恆、動量守恆、熱力學守恆以及位勢能守恆等條件。同時，透過角動量守恆以及動量守恆的過程，找到了模式層與模式介面層之間的轉換關係，而在垂直層內插比例上，本文採用上下兩層數值的平均值來內插至中間層，其做法上與現行 CWB GFS 所採用 Philips(1974)的垂直差分法有所不同，其影響程度仍需要後續進行評估。此外在垂直通量的計算上採取了沒有假設的作法，直接由垂直速度的定義來反求，雖然沒有假設的作法較能反映實際狀況，但相對的可能造成較不穩定的積分結果，當然亦得視測試之結果再決定最終垂直通量的計算方法。

擾動法的運用，有助於我們將所謂的非靜力效應與靜力效應區隔開，此方法有利於將模式設計為可以選擇採用靜力或是非靜力之過程，進而可以以靜力之架構來進行測試，以確保此靜力架構與目前之 CWB GFS 有相近的結果，亦有利於在動力架構發展過程中排除問題，待確認架構無誤之後，便進一步切換至非靜力模式，便可與靜力之結果進行比較，以利於後續對於非靜力動力架構系統進行評估，並確認與現行作業系統能有一致性的表現以及對非靜力效應的凸顯。

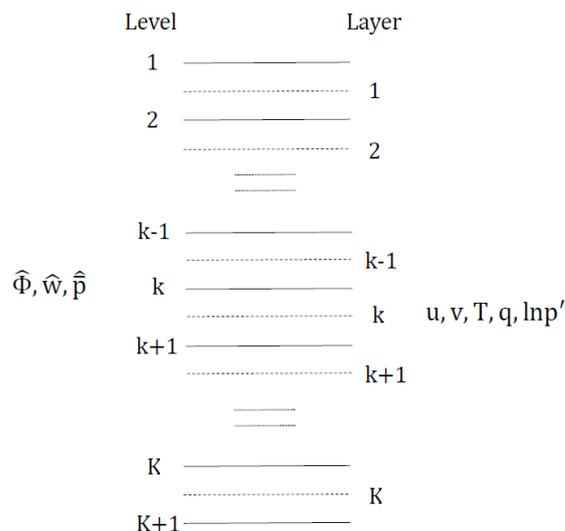


圖 1、模式之垂直分層結構，顯示模式中模式介面層與模式層間之關係。整數數字表示模式介面層或是模式層之層數。變數上方有[^]符號代表位於模式介面層之變數，沒有[^]符號之變數則是位於模式層上。

參考文獻

- Daley, R., 1988: The normal modes of the spherical non-hydrostatic equations with applications to the filtering of acoustic modes. *Tellus*, 40A, 96–106
- Haltiner, G. J., and R. T. Williams, 1980: *Numerical Predictions and Dynamical Meteorology*. 2d ed. John Wiley and Sons, 477 pp.
- Juang, H.-M. H., 2000: The NCEP Mesoscale Spectral Model: A Revised Version of the Nonhydrostatic Regional Spectral Model. *Mon. Wea. Rev.*, 139, 2329-2362
- Phillips, N. A., 1974: Application of Arakawa's energy-conserving layer model to operational numerical weather prediction. Technical Report 104, National Meteorological Center office, Washington, DC. 40 pp