

發展模式與觀測雷達回波影像比對技術及改善極短期降水預報之研究

陳新淦¹ 黃椿喜¹ 呂國臣¹ 洪景山² 張博雄¹

¹中央氣象局氣象預報中心

²中央氣象局氣象資訊中心

摘要

本研究主要目標為發展雷達回波影像辨識技術以比對眾多系集模式預報結果，從中客觀篩選出模式預報與觀測回波接近的系集成員，並探討及評估其極短期（3 至 12 小時內）定量降水預報的表現。研究將以兩種圖形辨識理論為基礎進行比對，一為動差不變量理論（Moment Invariants），另一為皮爾森相關係數（Pearson's correlation coefficient）。前者可將二維回波圖形轉化為具物理幾何意義的七個分量，本研究特別發展片段逐步分塊的重複計算方式以提高辨識能力，並利用相似度演算法（similarity algorithm）來量化模式和觀測回波的相近程度；後者為統計上應用至平面空間的相關係數計算。

研究個案選取 2013 年康芮（Kong-Rey）颱風之 8 月 28 日 1200 UTC 至 29 日 0600 UTC 每三小時作為觀測回波比對時間（共七個個案），使用模式資料包括本局發展之 Weather Research and Forecasting（WRF）區域模式（WRFD、TWRP）和系集模式（WRF Ensemble Prediction System；WEPS），系集預報成員共有 440 個。研究結果顯示模式雨量的公正預兆得分（Equitable Threat Score；ETS）隨著比對排名順序大致呈現線性遞減的趨勢，雖然名次間的 ETS 仍有高低跳動的情況。以七個個案平均而言，比對排序前 10 名的系集平均雨量之偏倚得分（Bias Score；BS）在中小雨量略呈現過度預報（BS 約在 1.1 至 1.4），而較大雨量門檻則為預報不足之結果。比對排序前 10 名系集平均雨量之 3 小時累積雨量在 20 mm（50 mm）雨量門檻的 ETS 約為 0.47（0.27），而 WRFD、TWRP 和 WEPS 系集平均則分別為 0.35（0.32）、0.17（0.11）和 0.19（0.06），除 WRFD 在較大雨量門檻下表現較好外，辨識比對方法皆呈現明顯提升雨量預報技術得分的結果。此外，12 小時累積雨量在 130 mm 雨量門檻的 ETS 亦由 WEPS 系集平均的 0.1 經比對篩選後，提升至約 0.25。因此，透過此雷達回波影像比對技術可有效挑選出與實際觀測相近的系集預報成員，以期能進一步改善極短期定量降水預報之能力，並在預報作業上提供更即時且更有用的客觀參考資訊。

關鍵字：影像辨識、雷達回波、系集預報、極短期定量降水預報

預報能力是作業單位積極達成的目標與方向。

一、前言

受限於觀測資料密度、物理過程的科學瞭解、與臺灣複雜地形的交互作用等因素，定量降水預報仍是現今天氣預報作業中極具挑戰和困難的工作之一，尤其是極短期降水預報因為更局部的時間、空間解析度，數值天氣預報（numerical weather prediction, NWP）模式往往無法有效掌握，再加上短時的強降雨常導致嚴重的淹水、土石流等災情，因此提升極短期定量降水

除透過即時監測技術外，目前的極短期定量降水預報技術主要有兩種方式，一是由雷達回波和雨量觀測經過時空外延法（extrapolation）來推估極短期降雨，另一種是藉由具動力和物理過程的 NWP 模式得到可供參考的模擬雨量。前者由於是單純的外延推估，在 3 小時內的降雨預報一般表現較好（Lin et al. 2005），然而因未考慮大氣動力過程和綜觀環境變化，其預報能力在 3 小時後大多隨時間呈現快速遞減結果。相對而言，NWP 動力模式在積分初期通常會有調整的階段

(spin up)，加上解析度的不足，故一般對 3 到 6 小時內的降雨掌握能力較差，而 1 至 3 日內的累積降雨預報較具參考價值。國外目前已有發展 MAPLE (McGill Algorithm for Precipitation Nowcasting by Lagrangian Extrapolation; Turner et al. 2004) 外延法和進一步結合外延法和 NWP 模式的 ARMOR (Adjustment of Rain from Models with Radar; DuFran et al. 2009) 技術，其結果顯示對極短期降雨預報有一定程度之改善。

除單一決定性 NWP 模式外，考慮初始擾動和模式誤差的系集預報亦可作為客觀參考的雨量預報指引並提供不確定性的資訊。然而，系集模式通常產出眾多的預報結果且有些模式成員的預報可能已經與觀測有顯著的誤差，進而導致系集平均資訊可能被平滑掉而無法突顯有效的降雨特徵。因此，本研究目標為發展雷達觀測回波型態辨識 (pattern recognition) 技術，客觀篩選與觀測回波較為接近的系集成員，並探討其極短期 (3 至 12 小時內) 定量降水預報表現。

二、圖形辨識理論及演算法

(一) 動差不變量理論

動差不變量 (Moment Invariants) 圖形辨識理論最早是由 Hu (1962) 所提出，以下簡要說明其概念。給定一個二維連續函數 $f(x, y)$ ，其 $p+q$ 階的動差 (或稱矩) 定義為

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

而相對於質心位置 ($\hat{x} = m_{10} / m_{00}$, $\hat{y} = m_{01} / m_{00}$) 的中心動差則定義為

$$\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \hat{x})^p (y - \hat{y})^q f(x, y) dx dy, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

可經數學證明由(2)式定義的中心動差對於 $f(x, y)$ 函數圖形在任意平移後仍是不變的。進一步經尺度作標準化後的中心動差定義為

$$\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^{1+(p+q)/2}}, \quad p+q = 2, 3, \dots \quad (3)$$

同時(3)式定義的動差對於函數圖形在任意縮放後亦是不變的。接著，再經過旋轉座標轉換推導出七個具

物理幾何意義的特徵描述值如下

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \eta_{20} + \eta_{02} \\ \phi_2 &= (\eta_{20} - \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^2 \\ \phi_3 &= (\eta_{30} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{03})^2 \\ \phi_4 &= (\eta_{30} + \eta_{12})^2 + (\eta_{21} + \eta_{03})^2 \\ \phi_5 &= (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{30} + \eta_{12})(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2] + \\ &\quad (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{21} + \eta_{03})[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2] \\ \phi_6 &= (\eta_{20} - \eta_{02})(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2] + \\ &\quad 4\eta_{11}(\eta_{30} + \eta_{12})(\eta_{21} + \eta_{03}) \\ \phi_7 &= (3\eta_{21} - 3\eta_{03})(\eta_{30} + \eta_{12})(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2] - \\ &\quad (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{21} + \eta_{03})[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2] \end{aligned} \quad (4)$$

其中，二階動差 (即 $p+q=2$) 代表的是慣性矩，三階動差的意義為函數圖形對其均值分布的偏差，即扭曲度 (skewness)。因此，(4)式定義的七個分量對於連續函數圖形之平移、尺度和旋轉具有不變的特性，於是常作為辨識兩張圖形是否為一致的方法之一。然而，有研究指出圖形在離散化條件下會影響到其在尺度和旋轉上動差不變的特性 (陳等人 2003)。

(二) 正規化相似度與片段逐步分塊計算

本研究所使用的圖形為網格化的雷達回波影像，故(2)式在離散化情況下的型式為

$$\mu_{pq} = \sum_1^Y \sum_1^X (x - \hat{x})^p (y - \hat{y})^q f(x, y) \Delta x \Delta y \quad (5)$$

其中， X 和 Y 分別為東西及南北方向的網格格點數， $f(x, y)$ 為在 (x, y) 網格點上的回波值 (單位為 dBZ)，再依序由(5)、(3)、(4)式計算出每張回波圖形所對應的七個動差分量。參考黃與蔡(2010)之方法計算兩張圖形在轉化為七個數值分量後的相似度，首先將七個分量予以正規化 (normalization)，再計算距離相似度 (DS) 和夾角相似度 (AS)，最後得出第 i 個系集成員回波模擬與觀測回波的相似度 (similarity)，如(6)式所示：

$$S^i = (DS^i + AS^i) / 2 \quad (6)$$

此相似度值介於 0 與 1 之間，愈接近 1 表示模式回波與觀測的相似程度愈高。

如前所述，由(4)式計算的七個動差在連續函數圖形不論經過任意位置移動、任意比例縮放或任意角度旋轉的情況下，其值是固定不變的。然而，為有效考慮回波在位置、大小和旋轉上的差異，本研究特別提

出以片段分塊逐步移動的方式進行重複計算。首先先設定某一網格半徑的小區塊，計算其相似度值，然後將小區塊依序一次移動某個距離，並計算對應的相似度值，接著再增加區塊的半徑，重複以上動作直到區塊範圍不超過整個資料範圍為止，如此可得到每個區塊內的相似度值，最後取平均值，即 $S_{ave}^i = \sum_{n=1}^N S_n^i / N$ ，

其中， n 和 N 分別為每個區塊編號和總區塊數。由簡單的理想幾何圖形測試（結果省略）顯示此方法得到的平均相似度值比用單一全域計算的相似度值較能反映圖形在平移、縮放和旋轉上的差異，提高辨識能力。

（三）皮爾森相關係數

本研究所使用的另一個圖形辨識方法為皮爾森相關係數（Pearson's correlation coefficient），此方法即為統計上分析兩者變數的相關性，應用至平面空間回波圖形上的定義為（Yen and Johnston 1996）

$$r^i = \frac{\sum_j (x_j^i - \bar{x}^i)(y_j - \bar{y})}{\sqrt{\sum_j (x_j^i - \bar{x}^i)^2} \sqrt{\sum_j (y_j - \bar{y})^2}} \quad (7)$$

其中， x_j^i 和 y_j 分別表示第 i 個系集預報成員和實際觀測在第 j 個網格點上的雷達回波值， \bar{x}^i 和 \bar{y} 分別為第 i 個系集預報成員和實際觀測在整張圖形範圍內（即所有網格點）的平均回波值。計算出來的 r^i 表示第 i 個系集預報成員的雷達回波模擬與觀測回波的相關性，作為排序所有系集成員與觀測相近程度的依據。

三、資料使用及實驗設計

（一）資料說明

本研究使用的觀測資料來自本局發展和客製化的多重觀測工具之定量降雨估計與分類技術（或稱劇烈天氣監測系統；Quantitative Precipitation Estimation and Segregation Using Multiple Sensor, QPESUMS；Gourley et al. 2002；丘等人 2007），包含雷達整合回波產品（column vector, CV）及雷達降水估計產品，此雨量估計有經過雨量站的校驗和修正，兩項產品皆為內插至網格 $0.0125^\circ \times 0.0125^\circ$ 經緯度之資料。模式資料為以

Weather Research and Forecasting（WRF）區域模式為基礎經由本局進一步發展和建置的單一決定性預報模式（WRFD 與 TWRF）以及系集預報模式（WRF Ensemble Prediction System, WEPS），WEPS 利用不同的物理參數化擾動設定來產生 20 個系集預報成員（李與洪 2013），所使用的模式輸出為最內層網巢 5 km 解析度之每三小時一筆的回波與地面降雨預報。

由於觀測與模式資料的解析度不同，為了在比對計算和校驗評估上的一致性，將兩者資料統一內外插成網格 $0.02^\circ \times 0.02^\circ$ 的解析度，並切割擷取 $119.0^\circ\text{E} \sim 122.52^\circ\text{E}$ 、 $21.5^\circ\text{N} \sim 26.0^\circ\text{N}$ 範圍（即 177×226 網格點）的資料。

（二）個案選取及實驗設計

選取的研究個案為 2013 年康芮（Kong-Rey）颱風，觀測回波比對時間為 8 月 28 日 1200 UTC 至 8 月 29 日 0600 UTC 每逐三小時之 QPESUMS 雷達回波，共有七個個案，期間的颱風最佳路徑如圖 1a 所示。由圖 1b 可看出當颱風中心行經臺灣東北部近海時，雲系發展呈現相當不對稱的結構，較強的對流發展分布於臺灣西南部地區，中心附近的雲層發展相對地較弱。

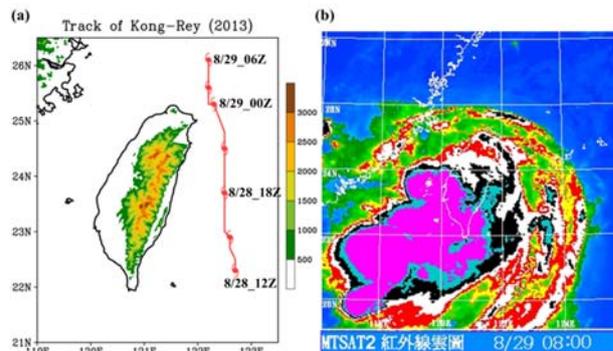


圖 1 (a)中央氣象局分析 2013 年康芮颱風自 8 月 28 日 1200 UTC 至 8 月 29 日 0600 UTC 的最佳路徑（每三小時標記位置），及臺灣地形高度（m）。(b)於 8 月 29 日 0000 UTC 的紅外線色調強化雲圖。

在模式積分時間及系集成員的選取上，考慮成員樣本數和有限的計算資源，以及模式在掌握天氣系統上可能的時間差異，因此本研究設計回波比對的策略為以觀測回波比對時間的前後六小時定為預報有效時間（valid time），將前四個初始時間（即最新時間模擬和三個 lag 時間的模擬）預報到此有效時段內的預報結果作為系集成員，故總共有 440 個成員的回波模擬和觀測回波進行辨識比對，其示意圖如圖 2。

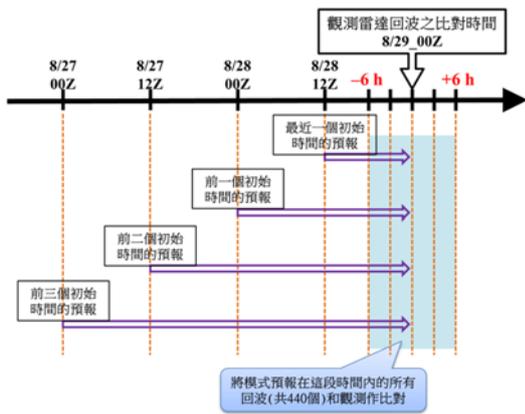


圖 2 以 8 月 29 日 0000 UTC 作為觀測回波比對時間的回波比對策略示意圖。

以兩種辨識方法為基礎並利用上述的比對策略設計三組實驗，第一、二組實驗是建立於動差不變量理論和片段分塊進行比對，差異在於第一組實驗只針對 0 dBZ 以上的一種回波門檻值進行比對計算（實驗名稱為 FIX），而第二組是設定多個回波門檻值（10 dBZ 的倍數，上限依據觀測回波最大值而定），重複針對不同門檻值以上的回波區域計算相似度值，再依簡單的高斯函數分配每個門檻值的權重，將權重乘上對應的相似度值得到權重相似度作為排序的依據（實驗名稱為 WGT）。第三組是使用皮爾森相關係數方法進行計算，實驗名稱為 COR。本研究的實驗設計整理如表 1。

表 1 本研究之實驗設計。

實驗名稱	辨識理論	計算方式	說明
FIX	動差不變量	片段逐步分塊及正規化相似度演算法	只設定 0 dBZ 以上一種門檻值作為回波比對區域。
WGT			設定多個回波門檻值作為比對區域，並依高斯函數作權重分配。
COR	皮爾森相關係數	針對每個格點使用(7)式計算	全域圖形內得出空間相關係數。

四、結果分析

(一) 單一個案說明—8 月 29 日 0000 UTC

本小節針對 8 月 29 日 0000 UTC 的回波比對時間展示 WGT 實驗在挑選系集成員和雨量預報的表現。圖 3 為 WGT 實驗在圖 2 的比對策略下計算排序前 10 名和最後 10 名預報成員的模擬回波，前 10 名成員的回波呈現在臺灣西南部地區有較強回波（40 dBZ 以上）

分布的特徵，與實際觀測回波的分布較為一致的情況，相對地，最後 10 名成員的回波分布則較為凌亂且強度較弱，故不論回波分布或量值皆與觀測有顯著的差異，此結果顯示 WGT 實驗的影像比對方式具有一定程度能力將與觀測回波差異較大的預報成員排序在後面。

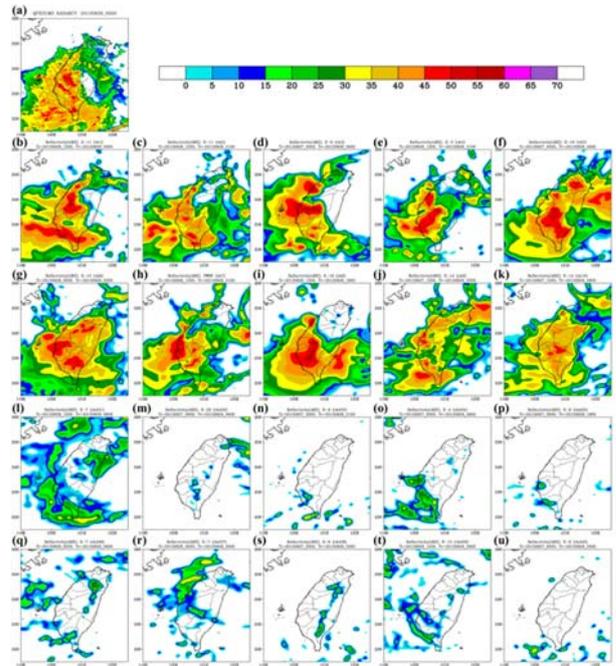


圖 3 (a)8 月 29 日 0000 UTC 的 QPESUMS 雷達觀測整合回波。以 WGT 實驗比對模式成員和 8 月 29 日 0000 UTC 觀測回波之排序結果，(b)-(k)第 1 名至第 10 名及(l)-(u)第 431 名至第 440 名。

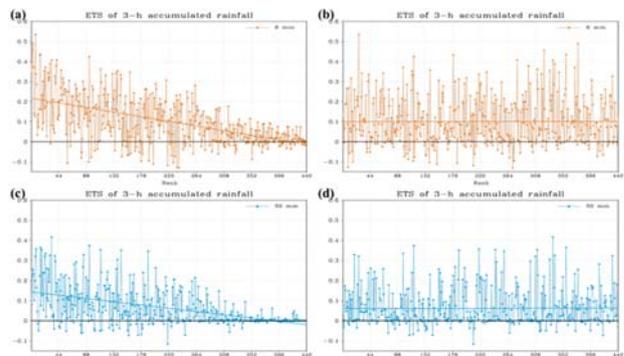


圖 4 系集預報 3 小時累積雨量在 6 mm 雨量門檻的 ETS 隨 440 個成員的曲線圖，橫軸為(a)以 WGT 實驗比對模式成員和 8 月 29 日 0000 UTC 觀測回波之排序結果以及(b)模式成員隨機排序之結果；直線為最小平方求得之線性迴歸。(c)-(d)同(a)-(b)，但為雨量門檻 50 mm 之 ETS 結果。

為進一步瞭解比對排序的雨量預報表現，將 440 個成員的公正預兆得分（Equitable Threat Score, ETS）依 WGT 比對排序和隨機排序進行計算（圖 4），結果顯示 3 小時累積雨量的 ETS 不論在小或大雨量門檻皆隨 WGT 排序名次呈現線性遞減的趨勢（圖 4a,c），雖

然名次間仍有跳動較大的情況。相較於隨機排序的結果（圖 4b,d）顯示經由回波辨識方式可將雨量預報表現較好的成員篩選到前面的名次而較差的預報則排序在後面，因此呈現較好的線性遞減趨勢。

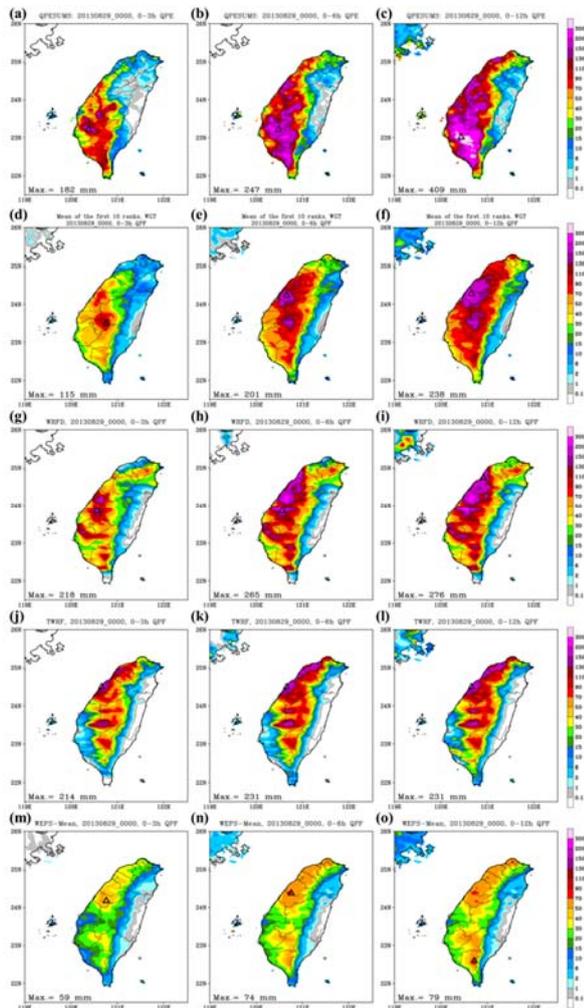


圖 5 於 8 月 29 日 0000 UTC 時間往後的 3、6 及 12 小時累積雨量分布圖，(a)-(c)QPESUMS 雷達降水估計、(d)-(f)WGT 實驗比對排序前 10 名成員的系集平均、(g)-(i)WRFD 模式、(j)-(l)TWRF 模式及(m)-(o)WEPS 模式 20 個成員的系集平均。WRFD、TWRF 和 WEPS 的模式初始時間為 8 月 28 日 1200 UTC。

比較 WEPS 系集平均（圖 5m-o）和 WGT 實驗篩選前 10 名的系集平均雨量（圖 5d-f）顯示透過挑選出與觀測回波相近的預報成員呈現提高雨量極值的結果，3 小時累積雨量極值由 WEPS 系集平均的 59 mm 在比對篩選後增加為 115 mm，12 小時雨量極值更由 79 mm 增加為 238 mm，接近單一決定性預報的 WRFD 和 TWRF 模式，不過皆仍是低估觀測雨量的 409 mm，這可能與模式解析度、物理過程、地形交互作用等因素有關。值得注意的是 TWRF 和 WEPS 系集平均的雨量

模擬在西南部沿海和平地有明顯低估的情況，而經比對計算方式改善此雨量低估的現象，與 WRFD 模式的雨量分布相近。此改善西南部地區雨量預報的結果亦可由定量降水機率預報看出（圖 6），定量降水機率的意義為在一系集空間中，成員雨量預報大於某門檻值所佔得比例。WGT 比對結果和 WEPS 之 3 小時累積雨量大於 0.1 mm 的機率在超過 80% 的區域幾乎都涵蓋全臺灣（圖 6b,c），唯前者在花蓮沿海的降水機率有較高估的情況。在強降雨（大於 50 mm）的降水機率而言，明顯看出 WGT 實驗比對結果有效突顯西南部地區發生強降雨的機率特徵，由 WEPS 的 40%~50%（圖 6f）增加至 70%~80%（圖 6e），而且也降低北部地區發生大雨的機率預報，與實際降雨範圍較一致。

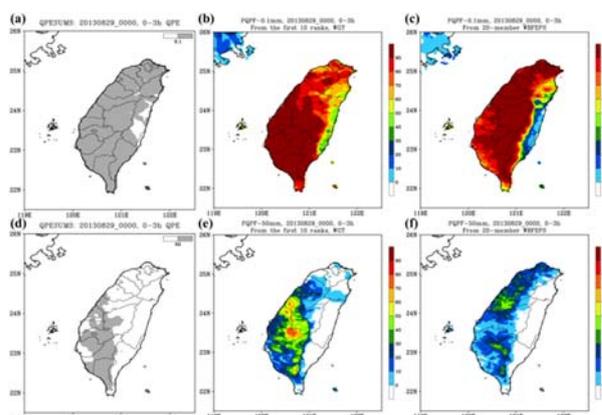


圖 6 (a)於 8 月 29 日 0000 UTC 時間往後 3 小時累積之雷達降水估計，雨量在 0.1 mm 以上以灰階區域標示。3 小時累積雨量超過 0.1 mm 的降雨機率，以(b)WGT 實驗比對排序前 10 名的系集成員及(c)WEPS 模式(初始時間為 8 月 28 日 1200 UTC) 20 個系集成員之計算結果。(d)-(f)同(a)-(c)，但為雨量門檻 50 mm 之結果。

(二) 個案平均結果

本小節探討從 8 月 28 日 1200 UTC 至 29 日 0600 UTC 每逐三小時的七個回波比對個案之整體雨量預報表現，由偏倚得分 (Bias Score, BS) 及 ETS 進行評估。圖 7 顯示不論 3 小時或 12 小時累積雨量而言，以影像辨識為基礎的三組實驗排序前 10 名系集平均雨量在 20 mm 以下中小雨量門檻皆呈現過度預報的結果，BS 約在 1.1 到 1.4 之間，而在較大雨量門檻下則為預報不足之情況。比較 WEPS 系集平均和 WGT 實驗的結果為 3 小時雨量在 50 mm 門檻的 BS 由前者的約 0.2 增加至後者的 0.8，表示比對方法有助於改善 WEPS 系集平均雨量對強降雨嚴重預報不足的结果。

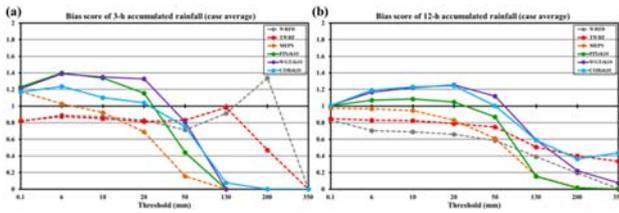


圖 7 本研究七個個案平均之不同模式和實驗對(a)3 小時累積雨量及(b)12 小時累積雨量在不同雨量門檻下的 BS 結果。比對實驗 (FIX、WGT 及 COR) 為取排序前 10 名成員的系集平均雨量。

在 ETS 的雨量技術得分方面，三組比對實驗的前 10 名 3 小時累積系集平均雨量在 6~20 mm 門檻下的 ETS 高於 WRFD、TWRP 和 WEPS 系集平均(圖 8a)，而在 50 mm 門檻以上則以 WRFD 的表現較好。舉例而言，WGT 和 COR 比對實驗之 3 小時雨量在 50 mm 門檻的 ETS 相較於 WEPS 系集平均的結果由約 0.06 提升至 0.27 左右(圖 8a)，且 12 小時雨量在 130 mm 門檻的 ETS 由約 0.1 提升至 0.25(圖 8b)。有趣的是 12 小時累積雨量在 130 mm 門檻以上的強降雨以 COR 實驗的表現較好，相對在 20 mm 以下的中小雨則以 FIX 實驗的得分為最高。此外，值得注意的是若比較同樣以動差不變量為基礎的 FIX 和 WGT 實驗，後者在較大雨量門檻下的 ETS 皆呈現高於前者的情況，且與 COR 實驗的預報表現相近。

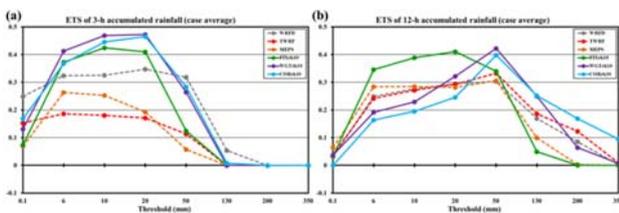


圖 8 同圖 7，但為 ETS 之結果。

五、結論

本研究以兩種圖形辨識理論發展雷達回波比對技術，從包含 WRF 單一決定性預報和系集模式的 440 個成員中客觀量化及排序模式回波與觀測的相似程度，設計三組比對方法的實驗，針對 2013 年康芮颱風自 8 月 28 日 1200 UTC 至 29 日 0600 UTC 每三小時的七個個案評估比對實驗排序前 10 名成員系集平均雨量的極短期定量降水預報表現。

由單一個案結果顯示雨量的 ETS 隨比對實驗的排

序相較於隨機排序整體呈現較佳的線性遞減趨勢，且排序前 10 名成員的回波分布與特徵亦與觀測較為一致。此外，經比對方法的系集平均雨量之極值增加至接近單一決定性預報，比原本的系集平均雨量極值較接近觀測雨量，同時也有效突顯在臺灣西南部地區發生強降雨的機率特徵。由七個個案平均的 BS 結果顯示比對實驗在中小雨量門檻為過度預報，而較大雨量則有預報不足之情況。整體而言，比對實驗的 ETS 大致都呈現高於原本系集平均的結果，3 小時雨量的 ETS 可增加達約一倍以上，且相近於或優於單一決定性預報的表現，因此藉由本研究發展的回波辨識比對方法可客觀挑選與觀測回波較為相似的系集成員，提升雨量預報技術得分，以期能在預報作業上提供另一更即時且更有用的定量降水預報參考指引。

六、參考文獻

- 丘台光、陳嘉榮、張保亮、林品芳，2007：“劇烈天氣監測系統 QPESUMS 之服務與應用”，國土資訊系統通訊，61 卷，15—26。
- 李志昕、洪景山，2013：“區域系集預報系統強化研究—物理參數法擾動強化”，102 年天氣分析與預報研討會論文彙編，A2，37—42。
- 陳浩、陸聖、高啟孝，2003：“離散條件下數字圖像矩不變量不變性的分析與研究”，海軍工程大學學報，15 卷，4 期，89—92。
- 黃金榮、蔡奇紘，2010：“圖片相似度演算法”，機光電研討會論文集，131—140。
- DuFran, M. Z., R. L. Carpenter, Jr. and B. L. Shaw, 2009: “Improved precipitation nowcasting algorithm using a high-resolution NWP model and national radar mosaic”, AMS 34th Conference on Radar Meteorology, Williamsburg, VA, 3B.6.
- Gourley, J. J., R. A. Maddox, D. W. Burgess, and K. W. Howard, 2002: “An exploratory multisensory technique for quantitative estimation of stratiform rainfall”, *J. Hydrometeor.*, **3**, 166—180.
- Hu, M.-K., 1962: “Visual pattern recognition by moment invariants”, *IRE Transactions on Information Theory*, **8**, 179—187.
- Lin, C., S. Vasic, A. Kilambi, B. Turner, and I. Zawadzki, 2005: “Precipitation forecast skill of numerical weather prediction models and radar nowcasts”, *Geophys. Res. Lett.*, **32**, L14801.
- Turner, B., I. Zawadzki, and U. Germann, 2004: “Predictability of precipitation from continental radar images. Part III: Operational nowcasting implementation (MAPLE)”, *J. Appl. Meteor.*, **43**, 231—248.
- Yen, E. K., and R. G. Johnston, 1996: “The ineffectiveness of the correlation coefficient for image comparisons”, Report LAUR-96-2474, Los Alamos National Laboratory.